Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito
Tutori: Giulio Fiorillo e Alessandro Mazzoccoli

TUTORATO 2
9 OTTOBRE 2014

1. Dimostrare che dato un inseme $\mathcal{A}$, se $p \in \mathcal{A}$ e p é maggiorante (minorante) di $\mathcal{A} \Rightarrow p$ è massimo (minimo) in $\mathcal{A}$

2. Calcolare Sup e Inf dei seguenti insiemi e determinare l'esistenza di massimi e minimi:
   - $A := \left\{ e^{x^2+y^2} : (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}$;
   - $B := \left\{ \sum_{k=0}^{N} (\frac{1}{2})^k : N \in \mathbb{N} \right\}$;
   - $C := \left\{ (1 - cos(n\pi))n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
   - $D := \left\{ (-1)^n (7 - \frac{2}{n}) arctg(n) : n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
   - $E := \left\{ \frac{1}{p} : p \ primo \right\}$;

3. Dimostrare le seguenti affermazioni per induzione:
   ♠*Principio Di Induzione*
   Se una propriet'a P(n) dipendente da una variabile intera n vale per un $n_0 \in \mathbb{N}$ e se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale P$(n) \Rightarrow$ P$(n+1)$ allora P vale $\forall n \geq n_0$♣
   - $2^n \geq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$
   - $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ \forall N \in \mathbb{N} \ con \ N \geq 1$
   - $\sum_{k=1}^{N} k^3 = \frac{n^2(n+1)}{4} \ \forall N \in \mathbb{N} \ con \ N \geq 1$

     ♠ Da notare che $(\sum_{k=1}^{N} k)^2 = \sum_{k=1}^{N} k^3$
   - $n! \geq 2^{n-1} \ \ \forall n \geq 1 \ con \ n \in \mathbb{N}$
   - (**)Definiamo $r_n := \sqrt{\underbrace{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1} \cdots}}_{n \ volte}}$ Dimostrare che $r_n \notin \mathbb{Q} \ \forall n \geq 2$

     ♠ Nota: se facciamo tendere $n \to \infty$ otteniamo il numero aureo $r_n \to \varphi = 1.618....$

4. Esercizi su insemi aperti e chiusi.

- Dimostrare che $\mathbb{Q}$ non è ne aperto ne chiuso e da questo intuire che $\mathbb{I} := \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ non è ne aperto ne chiuso;
- Dimostrare che $\mathbb{N}$ è un inseme chiuso;
- Dimostrare che (a,b] non è ne aperto ne chiuso ;

5. Dimostrare che la segunte funzione ammette zeri
   f(x)=$\frac{x^{125}-2x^2-x^3+2}{x^2+2}$